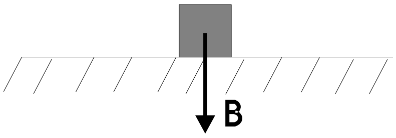
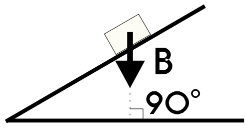
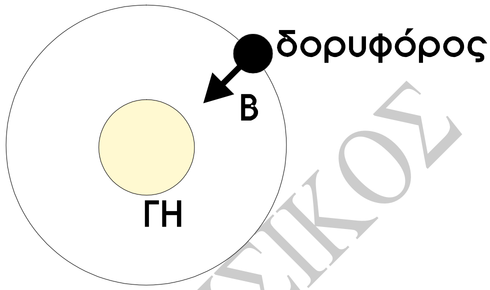
<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ - ΣΤΑΤΙΚΗΣ</u>

1.Σχεδιάζω όλες τις δυνάμεις που εξασκούνται στο σώμα. Οι δυνάμεις που σχεδιάζω είναι:

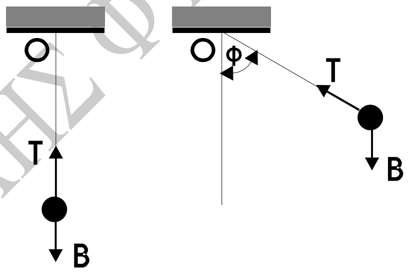
α)<u>Το βάρος</u> του σώματος που έχει σημείο εφαρμογής το κέντρο βάρους του σώματος, διεύθυνση κατακόρυφη (κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο) και κατευθύνεται πάντα προς το κέντρο της Γης.







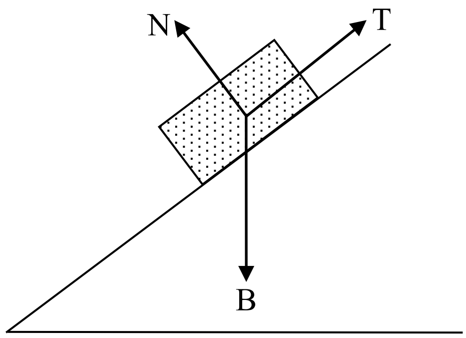
β)<u>Τη τάση του νήματος</u> δηλ. τη δύναμη που δέχεται ένα σώμα από ένα νήμα με το οποίο έχει συνδεθεί. Η τάση του νήματος που ασκείται σ' ένα σώμα έχει τη διεύθυνση του νήματος και φορά από το σώμα προς το νήμα. Όταν ένα αβαρές νήμα συνδέεται με δύο σώματα και είναι τεντωμένο η τάση που ασκεί σε κάθε σώμα είναι ίδια. Η τάση που ασκείται σ' ένα σώμα είναι η αντίδραση της δύναμης με την οποία τεντώνεται το νήμα.

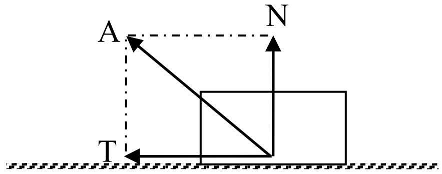


γ)Η αντίδραση που δέχεται ένα σώμα όταν εφάπτεται σε άλλο σώμα, θα είναι κάθετη στο επίπεδο επαφής όταν δεν υπάρχει τριβή (λείες επιφάνειες). Όταν υπάρχει τριβή η δύναμη που δέχεται το σώμα καθορίζεται ως εξής:

i)Σχεδιάζω **<u>την κάθετη αντίδραση Ν</u>** (που είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια επαφής)

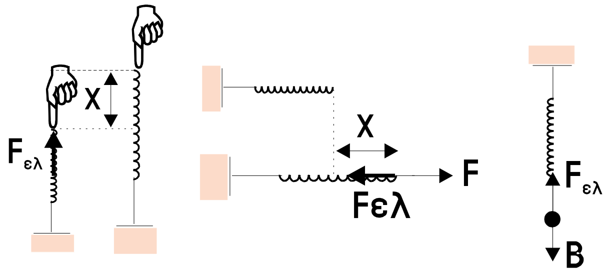
ii)σχεδιάζω **<u>την τριβή</u>**. Η συνισταμένη των δυο αυτών δυνάμεων(δηλ. της κάθετης αντίδρασης και της τριβής είναι η δύναμη που δέχεται το σώμα Α (αντίδραση) (δες σχήμα). Η τριβή είναι πάντα παράλληλη στην επιφάνεια επαφής των σωμάτων και έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης του σώματος ή αν πρόκειται για στατική τριβή έχει φορά αντίθετη της τάσης κινήσεως του σώματος.



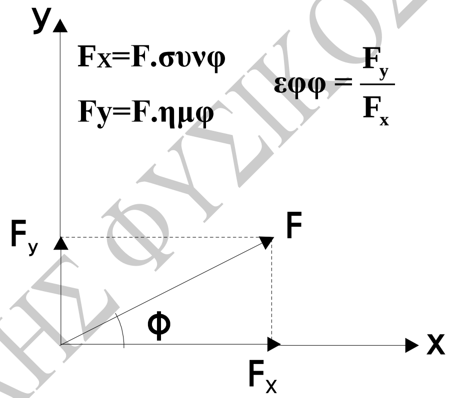


δ)Όταν έχω μια άρθρωση τη δύναμη τη σχεδιάζω με τυχαία διεύθυνση. Τα αποτελέσματα της άσκησης καθορίζουν την ακριβή διεύθυνση και τη φορά της.

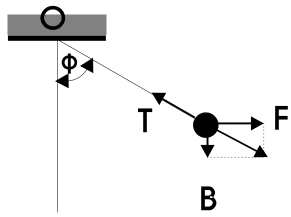
ε)Όταν έχω ελατήριο σχεδιάζω και την δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου που έχει πάντα τέτοια φορά ώστε να τείνει να επαναφέρει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Η $F_{ελ}$ δίνεται από το νόμο του Hook $\mathbf{F_{ελ.} = κ.χ}$ όπου κ η σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου.



2. Αφού σχεδιάσω τις δυνάμεις εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$. Έχω βέβαια πάρει ένα σύστημα αναφοράς και έχω αναλύσει τις δυνάμεις στους άξονες χ και ψ. Εφαρμόζω τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής μια φορά κατά τον άξονα των χ και μια φορά κατά τον άξονα ψ. Δηλαδή $\mathbf{\Sigma F_\chi=m\alpha_\chi}$ **και** $\mathbf{\Sigma F_y=m\alpha_y}$. Εάν σε ένα άξονα δεν έχω κίνηση ή έχω ευθύγραμμη ομαλή κίνηση τότε η α σ' αυτό τον άξονα είναι 0. Σε αυτό το στάδιο θυμόμαστε τους τύπους **B=m.g** και **T=n.N** . Στη περίπτωση ισορροπίας **ΣF=0 ή** $\mathbf{\Sigma F_\chi=0}$ **και** $\mathbf{\Sigma F_\psi=0}$.



Στη περίπτωση ισορροπίας τριών δυνάμεων πρέπει η συνισταμένη των δύο νάνε ίση και αντίθετη με την τρίτη. π.χ στο σχήμα η συνισταμένη των F και B να είναι ίση και αντίθετη με την T.



ΟΡΜΗ

Ορμή υλικού σημείου είναι το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την ταχύτητα του και είναι διανυσματικό μέγεθος $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$

Η ορμή ενός συστήματος διατηρείται εφ' όσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Δηλαδή εάν δύο υλικά σώματα σε μεταφορική κίνηση μεταξύ των οποίων συμβαίνει οποιασδήποτε φύσης αλληλεπίδραση θα ισχύει $m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2'$ (όπου υ_1,υ_2 οι ταχύτητες πριν την αλληλεπίδραση και υ_1',υ_2' οι ταχύτητες μετά την αλληλεπίδραση), αρκεί στη διάρκεια της αλληλεπίδρασης να μην εξασκούνται δυνάμεις εξωτερικές του συστήματος.

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\text{Αν} \quad \Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{P} = O \Rightarrow \vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \\ 2)\text{Αν} \quad \Delta\vec{P} = O \Rightarrow \Sigma\vec{F} = 0 \end{array}$$

Επειδή α)οι δυνάμεις τριβής ή άλλες εξωτερικές δυνάμεις κατά την κρούση δύο σωμάτων(μαζών) είναι αμελητέες σε σχέση με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την επαφή των σωμάτων(εσωτερικές του συστήματος) και β)Επειδή η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή

$\Delta t \to 0 \;\Rightarrow \vec{F}.\Delta t \to 0$ άρα $\Delta \vec{P} = 0$ μπορούμε να θεωρούμε ότι ισχύει η Α.Δ.Ο. σε οποιαδήποτε κρούση ανεξάρτητα αν το σύστημα είναι μονωμένο ή όχι. Με λίγα λόγια η ορμή θα διατηρείται σε κάθε κρούση ή έκρηξη (Διάσπαση που διαρκεί μικρό χρόνο). Επίσης η Α.Δ.Ο. θα ισχύει ακόμη και για τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων του μικρόκοσμου(ηλεκτρόνια, πρωτόνια κ.λ.π.)
Επειδή η ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος θα ακολουθεί τους κανόνες πρόσθεσης των διανυσμάτων όπως οι δυνάμεις, η ταχύτητα κ.λ.

Α. ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Ορισμός : **Ενέργεια είναι η φανερή ή κρυφή ικανότητα ενός σώματος για παραγωγή έργου.**

Είδη ενεργειών που θα συναντήσουμε στη μηχανική είναι α)κινητική ενέργεια β)δυναμική λόγω θέσης γ)δυναμική ενέργεια λόγω ελαστικής παραμόρφωσης (ελατήριο, τόξο κ.λ.π.) Το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας (είτε λόγω θέσης είτε λόγω ελαστικής παραμόρφωσης) ονομάζεται μηχανική ενέργεια.

α)Κινητική ενέργεια : εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ταχύτητας και δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{K = \tfrac{1}{2} m\upsilon^2}$$

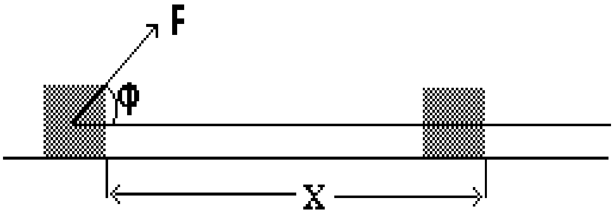
β)Δυναμική ενέργεια λόγω θέσης : $\mathbf{U_{θέσης}=mgh}$ όπου το h μετράται πάντα από το επίπεδο μηδενικής ενέργειας (επίπεδο αναφοράς) που εμείς ορίζουμε αυθαίρετα σε κάθε πρόβλημα. Συνήθως σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λαμβάνεται η κατώτερη θέση του σώματος. Σε αντίθετη περίπτωση όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο αναφοράς η δυναμική ενέργεια λαμβάνεται θετική ενώ όταν βρίσκεται κάτω από το επίπεδο, αρνητική.

Σημείωση : αν το h είναι συγκρίσιμο με την ακτίνα της Γης (ή του πλανήτη) τότε η U δίνεται από τη σχέση $\mathbf{U_{θέσης} = -G\frac{m_Γ . m_Σ}{r^2}}$ Στη περίπτωση αυτή σαν επίπεδο αναφοράς θεωρείται το άπειρο.

γ)Δυναμική ενέργεια ελατηρίου : Δίνεται από τη σχέση $\mathbf{U_{ελατ.} = \tfrac{1}{2}kx^2}$ Το x μετράται πάντα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

Β. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΡΓΟΥ

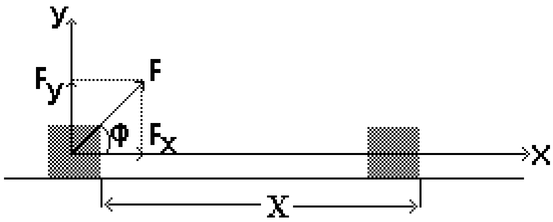
1)Έργο σταθερής δύναμης.



Αν έχω δύναμη $\vec{F} =$ σταθερή (κατά μέτρο διεύθυνση και φορά) και τροχιά ευθεία τότε το έργο υπολογίζεται από τη σχέση

$\mathbf{W_F = F.x.συν}φ$ όπου x η μετατόπιση και φ η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με τη μετατόπιση. Πιο απλά μπορούμε να υπολογίσουμε το W_F

ως εξής : Αναλύουμε την F σε δύο συνιστώσες μια παρ/λη στη μετατόπιση και μια κάθετη. Δεδομένου ότι η κάθετη συνιστώσα δεν παράγει έργο, ο υπολογισμός γίνεται από την σχέση **$W_F=\pm F_X.x$** Βάζω + όταν η δύναμη υποβοηθά την κίνηση (παραγόμενο έργο) και - όταν η δύναμη αντιτίθεται στη κίνηση (καταναλισκόμενο έργο).



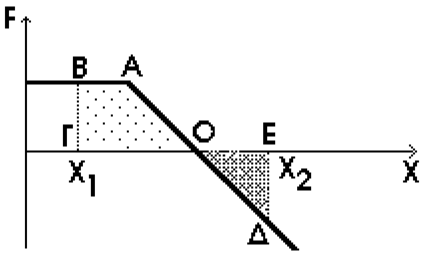
2)Έργο μεταβλητής δύναμης.

Αν δίνεται η μορφή της δύναμης σε συνάρτηση με τη μετατόπιση δηλ. F=f(x) τότε κάνουμε την γραφική παράσταση της F=f(x) και υπολογίζουμε το έργο της F από το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της "καμπύλης" και του άξονα των μετατοπίσεων, για την συγκεκριμένη μετατόπιση.

Αν δεν δίνεται η μορφή της δύναμης τότε παίρνουμε μια τυχαία θέση που καθορίζεται από τη μεταβλητή χ και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δρουν στο σώμα. Στη συνέχεια παίρνοντας υπόψιν μας τη δυναμική του σώματος (νόμος μηχανικής) καθορίζουμε την μορφή της δύναμης σε συνάρτηση με τη μεταβλητή x.

Μπορούμε να καθορίσουμε τη μορφή της δύναμης και από τυχόν άλλα στοιχεία του προβλήματος όπως π.χ. από το διάγραμμα υ=υ(t) βάσει του οποίου μπορεί να υπολογιστεί η α οπότε στη συνέχεια και η δύναμη από την σχέση F=m.α

Αν η δύναμη παίρνει και αρνητικές τιμές τότε το W_F υπολογίζεται αν από το εμβαδόν που βρίσκεται στα θετικά αφαιρέσουμε το εμβαδόν που βρίσκεται στα αρνητικά. Έτσι στο διπλανό σχήμα έχω:



$$\mathbf{W_{F(x_1 \to x_2)} = Εμβ(ΟΑΒΓ) - Εμβ(ΟΕΔ)}$$

<u>Προσοχή</u> : Στον υπολογισμό των εμβαδών τα F ,X τα παίρνουμε κατά απόλυτη τιμή.

3)Έργο συντηρητικής δύναμης.

Αν έχω συντηρητική δύναμη τότε το έργο της δίνεται από τη σχέση :

$\mathbf{W_{F_{ΣΥΝΤΗΡΙΤΙΚΗΣ}} = U(αρχ) - U(τελ)}$ Στον τύπο περιλαμβάνεται και το πρόσημο.

Συντηρητική είναι μια δύναμη που το έργο της δεν εξαρτάται από την μορφή της τροχιάς (διαδρομή) αλλά μόνο από την αρχική και τελική θέση (ή επίπεδο).

Αλλιώς συντηρητική δύναμη είναι μια δύναμη που το έργο της κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

Συντηρητικές δυνάμεις που θα συναντήσουμε είναι : **α) το βάρος, β)Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου** (ιδανικού) και γ)**Η ηλεκτρική δύναμη στο ηλεκτροστατικό πεδίο**

Γ. ΣΧΕΣΗ ΕΡΓΟΥ - ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Το έργο δύναμης είναι ένας μηχανισμός μέσω του οποίου ενέργεια μιας μορφής μετατρέπεται σε ενέργεια άλλης μορφής ή ενέργεια ενός σώματος Α μεταφέρεται σε ένα σώμα Β

α)<u>τυχαία δύναμη</u>. Όταν $\vec{F}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}$ τότε μεταφέρεται ενέργεια από το αίτιο της δύναμης στο σώμα, ενώ όταν $\vec{F}\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}$ τότε μεταφέρεται ενέργεια από το σώμα στο αίτιο της δύναμης.

β)<u>Το βάρος.</u> Όταν $\vec{B}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}$ τότε το W_B μετατρέπει την δυναμική ενέργεια σε άλλες μορφές ενέργειας (π.χ. κινητική), ενώ όταν $\vec{B}\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}$ τότε το W_B μετατρέπει ενέργεια (π.χ. κινητική) σε δυναμική.

γ)<u>Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου.</u> Αν $\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}$ τότε το $W_{F\varepsilon\lambda}$ μεταφέρει δυναμική ενέργεια από το ελατήριο στο σώμα, ενώ αν $\vec{F}_{\varepsilon\lambda.}\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}$ τότε το $W_{F\varepsilon\lambda}$ μεταφέρει ενέργεια από το σώμα στο ελατήριο όπου και αποταμιεύεται με τη μορφή δυναμικής ενέργειας.

δ)<u>Τριβή - αντίσταση (π.χ. αέρα)</u>. Μετατρέπει ενέργεια του σώματος σε θερμότητα.

ε)<u>Συνισταμένη δύναμη.</u>

i)Αν το σώμα επιταχύνεται το $W_{\Sigma F}$ μετατρέπει ενέργεια σε κινητική.

ii)Αν το σώμα επιβραδύνεται το $W_{\Sigma F}$ μεταφέρει την Εκιν του σώματος σε άλλο σώμα όπου και μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας.

iii)Αν **$\vec{\upsilon}$ = σταθ.** ($\Sigma\vec{F}=0$) τότε $W_{\Sigma F}=0$

Δ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ :

$$\boxed{\Delta K = W_{\text{όλων των δυνάμεων}}}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που εξασκούνται στο σώμα.

Ε. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ :

Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας σώματος ή συστήματος ισούται με το έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων.

$$\boxed{\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\text{μη συντηρητικών δυνάμεων}}}$$

Ζ. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Αν σε ένα σώμα ή σύστημα εξασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις ή μη συντηρητικές που όμως το έργο τους είναι μηδέν τότε η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή και το σύστημα ονομάζεται μηχανικό.

$$\boxed{E_{\mu\eta\chi(\text{αρχική})} = E_{\mu\eta\chi(\text{τελική})}}$$

2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα δουλεύουμε ως εξής : Σχεδιάζουμε την αρχική και τη τελική θέση του σώματος και σημειώνουμε την αρχική και τελική ταχύτητα. Στη συνέχεια σε κάποια ενδιάμεση θέση (τυχαία) σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και τις αναλύουμε πάνω σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων, με τον ένα άξονα (χ) παρ/λο στη κίνηση και τον άλλο κάθετο στη κίνηση, οπότε $\Sigma F_y=0$ και $\Sigma F_x=m\alpha$.

Σε περίπτωση κυκλικής κίνησης ο άξονας των χ είναι κάθετος στην ακτίνα και ο άξονας των y κατά την διεύθυνση της ακτίνας με θετική φορά προς το κέντρο οπότε $\Sigma F_y=F_k$ όπου $\mathbf{F_K = \frac{m\upsilon^2}{r}}$.

Τέλος εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε, για τη συγκεκριμένη διαδρομή ή την αρχή διατήρησης της ενέργειας(Α.Δ.Ε.) μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης .

Στη περίπτωση συστήματος δεν σχεδιάζουμε τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης. Ακόμη όταν εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε. προσέχουμε ότι :

$$E_{\mu\eta\chi}= K +U(\text{σώματος})+ U(\text{ελατηρίου})$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

α) Στις σχέσεις $F_{\varepsilon\lambda}=\kappa.\chi$ και $U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \frac{1}{2}kx^2$ το χ είναι η συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου που μετράται πάντα από το φυσικό του μήκος.

β) Όταν υπολογίζουμε την U σώματος(λόγω θέσης) ορίζουμε πάντα ένα επίπεδο αναφοράς με U=0 (συνήθως την κατώτερη θέση του σώματος)

γ) Το έργο του βάρους και το έργο της $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon}$ υπολογίζονται και από τις σχέσεις: $W_B = U_{\alpha\rho\chi.} - U_{\tau\varepsilon\lambda.}$ και $W_{F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.}} = U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.\alpha\rho\chi.} - U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.\tau\varepsilon\lambda.}$

δ) Όταν σε πρόβλημα αναφέρονται οι εκφράσεις :

i) Μέγιστο διάστημα $\rightarrow$ τότε $\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}=0$

ii) Χάνεται η επαφή σώματος επιπέδου $\rightarrow$ τότε N=0

iii) Στη θέση που η ταχύτητα γίνεται υ_{max} $\rightarrow$ τότε ΣF=0

ε) Όταν σε πρόβλημα δίνεται ή ζητείται χρόνος, τότε θα χρησιμοποιούμε και τους τύπους της κινηματικής.

ζ) <u>μεταβολή και ρυθμός μεταβολής :</u>

i) Η μεταβολή ενός μεγέθους X ορίζεται σαν $\Delta X=X_{\tau\varepsilon\lambda}-X_{\alpha\rho\chi}$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους ορίζεται σαν ο λόγος $\frac{\Delta X}{\Delta t}$

iii) Η επί % μεταβολή ενός μεγέθους ορίζεται σαν $\Delta X\%=\frac{\Delta X}{X_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}}.100\ \%$

<u>ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ</u>

Εξισώσεις χωρίς αρχική φάση

$x = A\eta\mu\omega t$

$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \qquad \upsilon_{max} = \omega A$

$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\omega t \qquad \alpha_{max} = \omega^2 A, \qquad \alpha = -\omega^2 x$

Ισχύει ακόμη: ΣF=mα

$\Sigma F = -m\omega^2 A\eta\mu\omega t, \quad \Sigma F_{max} = m\omega^2 A, \quad \Sigma F = -m\omega^2 x, \quad \Sigma F = -Dx \quad$ όπου $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

Εξισώσεις με αρχική φάση

$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \quad \upsilon_{max} = \omega A$

$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \ \alpha_{max} = \omega^2 A, \qquad \alpha = -\omega^2 x$

όπου φ η αρχική φάση που παίρνει τιμές : $0 \le \phi_0 < 2\pi$ (ποτέ 2π)

Ισχύει ακόμη : ΣF=mα

$\Sigma F = -m\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \phi), \quad \Sigma F_{max} = m\omega^2 A, \qquad \Sigma F = -m\omega^2 x, \qquad \Sigma F = -Dx$

όπου $D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

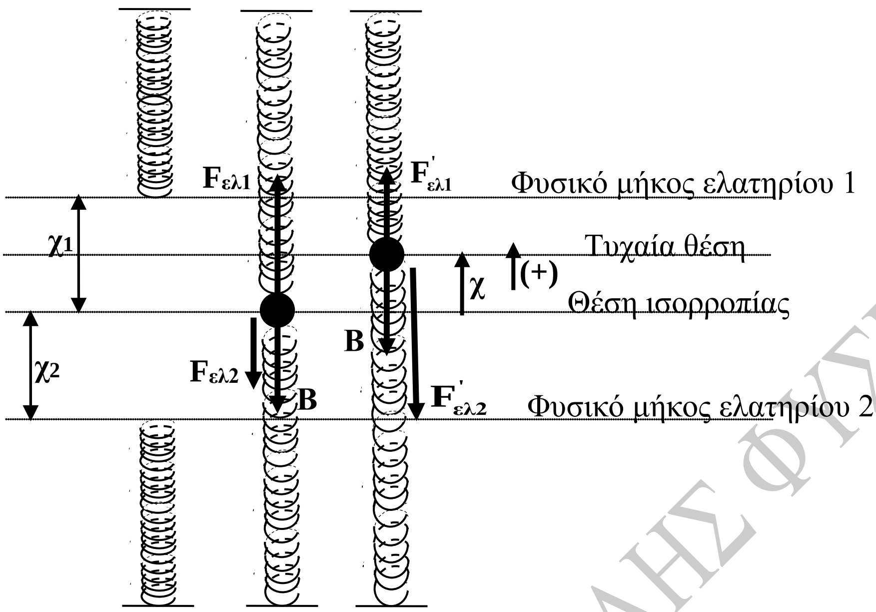
1. ***Πως αποδεικνύουμε ότι ένα σώμα κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση;***

- Σχεδιάζουμε όλες τις δυνάμεις που εξασκούνται πάνω του στη θέση ισορροπίας και γράφουμε την εξίσωση ισορροπίας δηλ. ΣF=0.
- Ορίζουμε μια φορά θετική
- Εκτρέπουμε το σώμα κατά τη θετική φορά από τη θέση ισορροπίας κατά x και αποδεικνύουμε ότι $\Sigma F = -D \cdot x$ Η συνισταμένη των δυνάμεων ΣF που ασκούνται στο σώμα στη τυχαία αυτή απομάκρυνση βρίσκεται αν από τις δυνάμεις που έχουν τη φορά της x (θετική) αφαιρέσουμε τις δυνάμεις που έχουν αντίθετη φορά από τη x. (δηλ. βάζουμε πρόσημο + στις δυνάμεις που έχουν θετική φορά και - στις δυνάμεις που έχουν αρνητική φορά)

  Προσοχή: Πάντα μιλάμε για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που κάνει ταλάντωση.

Παράδειγμα

Ένα σώμα είναι δεμένο με δύο ελατήρια κατακόρυφα και ισορροπεί όπως στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.



Πάντα όταν έχω ελατήρια τα σχεδιάζω στο φυσικό τους μήκος.

•*Στη θέση ισορροπίας έχω: ΣF=0*$\Rightarrow$

$$F_{ελ1}-B-F_{ελ2}=0\Rightarrow \boxed{κ_1χ_1-B-κ_2χ_2=0}\ (1)$$

•*Ορίζουμε θετική φορά (όπως στο σχήμα)* Εκτρέπουμε το σώμα κατά τη θετική φορά από τη θέση ισορροπίας κατά x. Στην τυχαία αυτή θέση σχεδιάζω τις δυνάμεις και έχω:

$$\Sigma F=F'_{ελ1}-B-F'_{ελ2}=k_1(x_1-x)-B-k_2(x_2+x)=k_1x_1-k_1x-B-k_2x_2-k_2x=$$

$$=-k_1x-k_2x+k_1x_1-B-k_2x_2\overset{(1)}{=}-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)χ$$ οπότε απέδειξα ότι

$$\boxed{\Sigma F=-(k_1+k_2)x}\Rightarrow \Sigma F=-D\cdot x$$ όπου D=κ1+κ2

2. Πως *υπολογίζουμε την αρχική φάση;*

- Κατά αρχή $0\leq \phi_0 <2\pi$
- Ορίζω μια θετική φορά διαγραφής
- Στη σχέση $x=Aημ(\omega t+\phi_0)$ θέτω t=0 οπότε

  $\Rightarrow ημ\phi_0=\dfrac{x}{A}$

Το βιβλίο συμβολίζει την αρχική φάση απλά φ. Το $φ_ο$ που χρησιμοποιώ είναι για να τονίσει ότι αναφερόμαστε για την χρονική στιγμή t=0

- Ελέγχω τη φορά της ταχύτητας την t=0 οπότε από τη σχέση

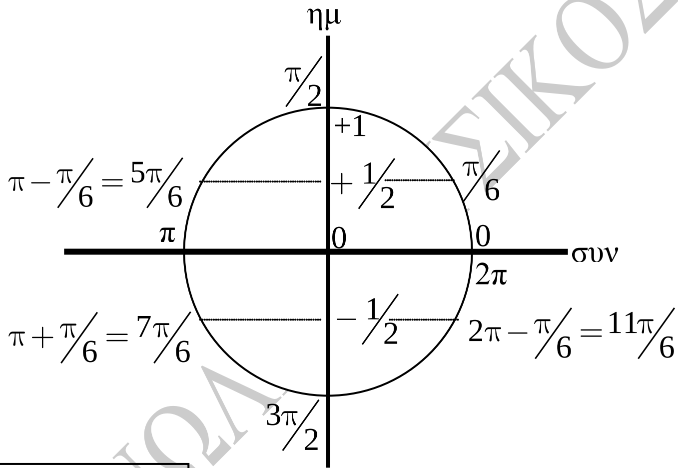
  $υ=\omega Aσυν(\omega t+\phi_0)\Rightarrow συν\phi_0=\dfrac{υ}{\omega A}$.

  Αν υ>0 τότε συν$φ_ο$>0 αλλιώς αν υ<0 τότε συν$φ_ο$<0.

  Αν το πρόσημο της υ είναι άγνωστο διακρίνω περιπτώσεις.
- Από το πρόσημο του ημ και του συν καθορίζω σε ποιο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου βρισκόμαστε.
- Βρίσκουμε την αρχική φάση π.χ. αν ημ$φ_0$=$-\dfrac{1}{2}$ και συν$φ_0$=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ τότε $φ_0$=$\dfrac{11\pi}{6}$

- Αν το ταλαντούμενο σώμα τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη θετική φορά έχουμε $\varphi_0=0$.
  Αν το ταλαντούμενο σώμα τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη αρνητική φορά έχουμε $\varphi_0=\pi$.
- Αν την t=0 έχουμε μέγιστη απομάκρυνση κατά τη θετική (+Α) φορά τότε $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, ενώ σε περίπτωση μέγιστης απομάκρυνσης κατά τη αρνητική φορά (-Α) $\phi_0 = \frac{3\pi}{2}$

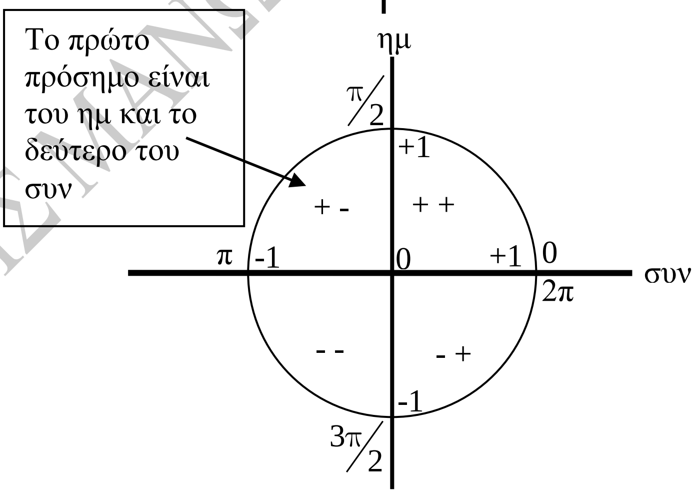
Παράδειγμα
Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και τη χρονική στιγμή t=0 είναι $x = \frac{A}{2}$ με υ>0. Να βρεθεί η αρχική φάση



Είναι : $\left\{\begin{matrix} x = A\eta\mu(\omega t + \phi_o) \\ 0 \le \phi_o < 2\pi \end{matrix}\right\}$

Για $t = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{A}{2} = A\eta\mu(\omega.0 + \phi_o) \\ 0 \le \phi_o < 2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \eta\mu\phi_o = \frac{1}{2} \\ 0 \le \phi_o < 2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \phi_o = \frac{\pi}{6} \\ \acute{\eta} \\ \phi_o = \frac{5\pi}{6} \end{matrix}\right\}$



Όμως $\upsilon > 0 \;\Rightarrow\; \sigma\upsilon\nu\phi_o > 0$

άρα η δεκτή λύση είναι η $\phi_o = \frac{\pi}{6}$

3. Υπολογισμός του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο θέσεων

Για να βρούμε το χρονικό διάστημα για να πάει το σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από μια θέση χ_1 σε κάποια άλλη θέση χ_2 δουλεύουμε ως εξής:

1. Παίρνουμε την εξίσωση χ=Αημφ δύο φορές ώστε να βρούμε τη φάση των δύο θέσεων. Αυτό γίνεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
2. υπολογίζουμε την διαφορά φάσης Δφ μεταξύ των δύο θέσεων $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$.
3. Από τη διαφορά φάσης υπολογίζουμε το ζητούμενο χρονικό διάστημα ως εξής:

   $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1= (\omega t_2-\varphi_o)-(\omega t_1-\varphi_o)=\omega(t_2-t_1)= \omega.\Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T}$

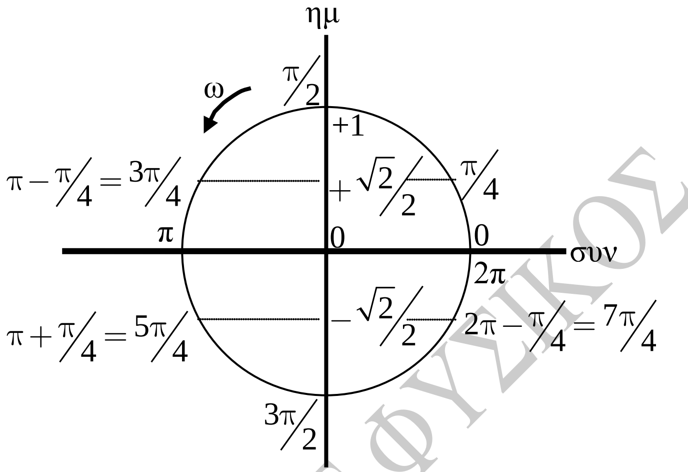
   Από εδώ φαίνεται ότι η αρχική φάση φ_o δεν παίζει ρόλο στον υπολογισμό του χρονικού διαστήματος για να πάει το σώμα από μια θέση χ_1 σε κάποια άλλη θέση χ_2. Επομένως δουλεύουμε σαν να μην υπήρχε αρχική φάση.

Παράδειγμα

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο Τ=2 s. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει από τη θέση $\chi_1 = \frac{A\sqrt{2}}{2}$ *με υ>0 στη θέση* $\chi_2 = -\frac{A}{2}$ *με υ<0.*

- $\chi_1 = A\eta\mu\phi_1 \Rightarrow \frac{A\sqrt{2}}{2} = A\eta\mu\phi_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta\mu\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } \begin{Bmatrix} \phi_1 = \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ \phi_1 = \frac{3\pi}{4} \end{Bmatrix}$$



όμως υ>0 $\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi_1 > 0$ άρα δεκτή λύση η $\boxed{\phi_1 = \frac{\pi}{4}}$

- $\chi_2 = A\eta\mu\phi_2 \Rightarrow -\frac{A}{2} = A\eta\mu\phi_2 \Rightarrow$

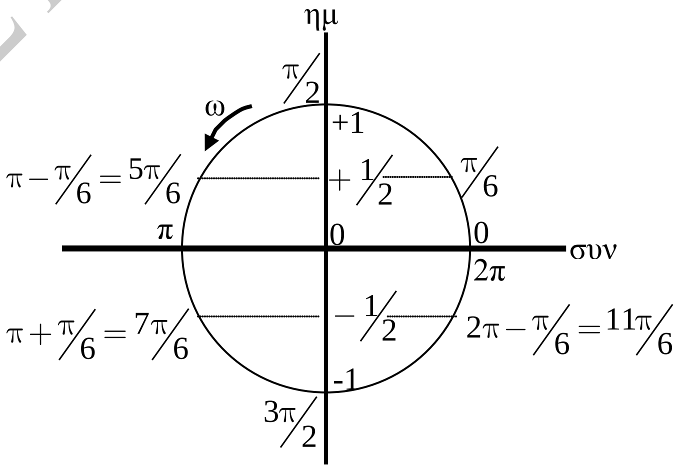
$$\eta\mu\phi_2 = -\frac{1}{2} \text{ άρα} \begin{Bmatrix} 1^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = \frac{7\pi}{6} \\ 2^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = \frac{11\pi}{6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 3^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = 2\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 4^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = 2\pi + \frac{11\pi}{6} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 5^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = 4\pi + \frac{7\pi}{6} \\ 6^{\eta} \text{ φορά } \phi_2 = 4\pi + \frac{11\pi}{6} \end{Bmatrix} \text{κ.λ.π.}$$

το 1ο , 3ο , 5ο , 7ο πέρασμα είναι για $\sigma\upsilon\nu\phi_2 < 0$ ***δηλ. γίνεται με υ<0***

ενώ

το 2ο , 4ο , 6ο , 8ο πέρασμα είναι για $\sigma\upsilon\nu\phi_2 > 0$ ***δηλ. γίνεται με υ>0***

Στο δικό μας πρόβλημα μας ενδιαφέρει να περάσει από την θέση $\chi_2 = -\frac{A}{2}$ με ταχύτητα αρνητική για πρώτη φορά μετά το πέρασμα του από τη θέση $\chi_1 = \frac{A\sqrt{2}}{2}$ άρα η λύση πού θα επιλέξω είναι η $\boxed{\phi_2 = \frac{7\pi}{6}}$



Έτσι $\Delta\phi = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}$

$\Delta\phi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{2}\Delta t \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{11}{12}\text{s}$

4. Υπολογισμός των χρονικών στιγμών που διέρχεται ο ταλαντωτής από μια θέση

α. υπολογίζουμε την αρχική φάση ϕ_o

β. Παίρνουμε την γενική εξίσωση της ταλάντωσης $x = A\eta\mu(\omega t + \phi_o)$ και θέτουμε όπου χ την τιμή που δίνεται για την θέση και όπου ϕ_o την τιμή της αρχική φάσης

γ. επιλύουμε την τριγωνομετρική εξίσωση

Παράδειγμα

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=0,2m και περίοδο T=0,5 s. Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη θέση χ=+A. Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές που διέρχεται από τη θέση $x=+\frac{A}{2}$.

α)υπολογίζουμε την αρχική φάση. Έχουμε $\left\{\begin{matrix} x = A\eta\mu(\omega t+\phi_o) \\ 0\le\phi_o<2\pi \end{matrix}\right\}$. *Για t=0 η εξίσωση γίνεται:*

$$\left\{\begin{matrix} +A = A\eta\mu(\omega.0+\phi_o) \\ 0\le\phi_o<2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \eta\mu\phi_o = 1 \\ 0\le\phi_o<2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \phi_o = \frac{\pi}{2}$$

β) Παίρνουμε την γενική εξίσωση της ταλάντωσης και θέτουμε όπου $x=+\frac{A}{2}$ και όπου $\phi_o=\frac{\pi}{2}$

οπότε $x = A\eta\mu(\omega t+\phi_o) \Rightarrow +\frac{A}{2} = A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \eta\mu(4\pi t+\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta\mu(4\pi t+\frac{\pi}{2}) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

γ)επιλύουμε την τριγωνομετρική εξίσωση και έχουμε $\left\{\begin{matrix} 4\pi t+\frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 4\pi t+\frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} t=\frac{6\kappa-1}{12} \\ \text{και} \\ t=\frac{6\kappa+1}{12} \end{matrix}\right\}$ με κ=0,1,2,…όμως δεν έχουν νόημα οι αρνητικές τιμές του χρόνου και

απορρίπτονται οπότε $\left\}\begin{matrix} t=\frac{6\kappa-1}{12} \text{ με κ=1,2,...} \\ \text{και} \\ t=\frac{6\kappa+1}{12} \text{ με κ=0,1,2,...} \end{matrix}\right.$

5. Το D εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή και είναι ανεξάρτητο του πλάτους ταλάντωσης. Αν αλλάξει το m τότε από τη σχέση $\boxed{D = m.\omega^2}$ αλλάξει το ω, το D όμως παραμένει σταθερό π.χ. για ένα συγκεκριμένο ελατήριο το D είναι ίσο με k (όπου k η σκληρότητα του ελατηρίου) ανεξάρτητα ποια μάζα είναι κρεμασμένη στο ελατήριο και ανεξάρτητα από το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί.

6. Προσοχή η μετατόπιση x από τη θέση ισορροπίας μπορεί να πάρει θετικές ή αρνητικές τιμές. Έτσι στη περίπτωση που έχουμε μια γεωμετρική σχέση μηκών για κάποια θέση το x θα παίρνεται κατά απόλυτο τιμή.

7. Κάθε πρόβλημα που έχει σχέση με α.α.τ. και ζητείται ταχύτητα ή θέση μπορεί να αντιμετωπισθεί είτε ενεργειακά (ΘΜΚΕ, ΑΔΜΕ, ΑΔΕ) είτε ταλαντωτικά οπότε εφαρμόζεται η

<u>αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση</u>

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}Dx^2=\sigma\tau\alpha\vartheta.=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2=\frac{1}{2}DA^2$$

Τυχαία θέση Θ.Ι. Ακραία θέση

<u>Προσοχή:</u>

α)Στις δυνάμεις του ελατηρίου $|F_{\varepsilon\lambda}|=\kappa.\chi$ το x μετράτε από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.

β)Στη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης όπως και τη ολική ενέργεια το x μετράτε από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. (**<u>Προσοχή</u>** . <u>Άλλο δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης και άλλο δυναμική ενέργεια του ελατηρίου</u>)

γ)Η δύναμη που συντηρεί την ταλάντωση (συνισταμένη δύναμη) είναι της μορφής $\Sigma F=-D\cdot x$ όπου το x μετράτε από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

δ)Η ενέργεια ταλάντωσης $E_{\tau\alpha\lambda}$, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι μεγέθη που δεν έχουν καμία σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη της μηχανικής.
Π.χ. η κινητική ενέργεια σώματος (στη μηχανική) εξαρτάται από τον παρατηρητή ενώ η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης ΟΧΙ.

ε)<u>Τα μεγέθη Τ και f είναι ανεξάρτητα από το πλάτος Α της γ.α.τ. και καθορίζονται μόνο από τη μάζα m και τη σταθερή της ταλάντωσης D.</u>

8. Στα προβλήματα ταλαντώσεων που έχουμε κρούση πρέπει να ξέρουμε τη θέση ισορροπίας πριν και μετά την κρούση.
Εάν έχουμε κρούση κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου διακρίνουμε τις ποιο κάτω περιπτώσεις.
α)Όταν το ελατήριο είναι σε οριζόντιο επίπεδο, σε κάθε κρούση η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει πριν και μετά την κρούση.
β)Όταν το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή πλάγιο, τότε **<u>στη πλαστική κρούση η θέση ισορροπίας αλλάζει.</u>**

9. Η αρχική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι και το πλάτος Α της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης. Έτσι $E_{\tau\alpha\lambda}=\frac{1}{2}DA^2$

<u>ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ-ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ -ΟΛΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ</u>

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad U=\frac{1}{2}Dx^2 \qquad E_{\tau\alpha\lambda}=K+U=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}Dx^2$$

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0) \qquad U=\frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t+\phi_0) \qquad E_{\tau\alpha\lambda}=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2$$

$$K=E_{\tau\alpha\lambda}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0) \qquad U=E_{\tau\alpha\lambda}\eta\mu^2(\omega t+\phi_0) \qquad E_{\tau\alpha\lambda}=\frac{1}{2}DA^2$$

$$K=E_{\tau\alpha\lambda}-U \qquad U=E_{\tau\alpha\lambda}-K$$

$$K=\frac{1}{2}DA^2-\frac{1}{2}Dx^2 \qquad U=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2-\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$$K=\frac{1}{2}DA^2(1-\frac{x^2}{A^2}) \qquad U=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2})$$

$$K=E_{\tau\alpha\lambda}(1-\frac{x^2}{A^2}) \qquad U=E_{\tau\alpha\lambda}(1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2})$$

$$U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}DA^2\frac{x^2}{A^2}=E_{\tau\alpha\lambda}\frac{x^2}{A^2}$$

<u>ΣΧΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ - ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗΣ</u>

<u>Απόδειξη της σχέσης</u>: $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$\left\{\begin{array}{c} x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \\ \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 = A^2\eta\mu^2(\omega t + \phi_0) \\ \upsilon^2 = \omega^2 A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \eta\mu^2(\omega t + \phi_0) = \dfrac{x^2}{A^2} \\ \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) = \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

ή ενεργειακά:

$$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{D}{m}(A^2 - x^2) \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{(A^2 - x^2)} \Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

<u>ΣΧΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ – ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ</u>

Έχουμε . $\alpha = -\omega^2.x \Rightarrow x = -\dfrac{\alpha}{\omega^2}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση $\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$ όπου $x = -\dfrac{\alpha}{\omega^2} \Rightarrow$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^4}}$$

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΡΧΗΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΑΔΕΤ)</u>

Α)Το σώμα εκτρέπεται από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κατά χ και αφήνεται ελεύθερο.

Το σώμα αποκτά μόνο δυναμική ενέργεια.

$E_{\tau\alpha\lambda}$=K+U$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 0 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boxed{A = x}$

Β)Το σώμα εκτρέπεται από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης κατά χ και εκτοξεύεται με ταχύτητα υ.

Το σώμα αποκτά και δυναμική και κινητική ενέργεια.

$E_{\tau\alpha\lambda}$=K+U$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$

Γ)Το σώμα εκτοξεύεται από την θέση ισορροπίας με ταχύτητα υ.

Το σώμα έχει μόνο κινητική ενέργεια.

$E_{\tau\alpha\lambda}$=K+U$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow DA^2 = m\upsilon^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon = A\sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \omega.A} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_{max}}$$

Δ)Συμβαίνει μεταβολή της μάζας ενός συστήματος που ισορροπεί.

Η στατική θέση ισορροπίας του συστήματος διαφέρει από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα το σώμα αποκτά μόνο δυναμική ενέργεια.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow \boxed{A = x}$$

Ε)Συμβαίνει μεταβολή της μάζας ενός συστήματος που ταλαντώνεται.

Η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή αλλάζει άρα το σώμα αποκτά δυναμική και κινητική ενέργεια.

$$E_{ταλ}=K+U \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

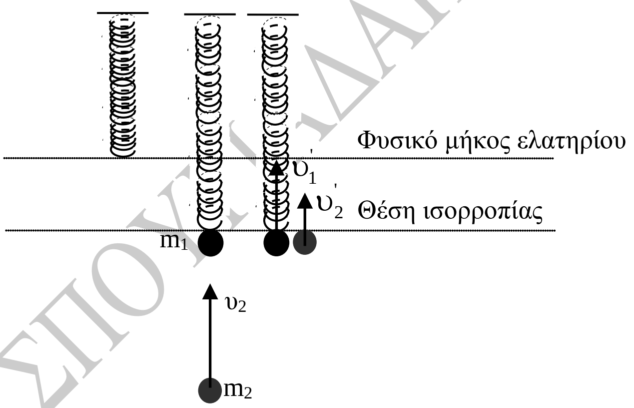
ΣΤ)Ελαστική κρούση

Έστω το σώμα 2, μάζας m_2 και ταχύτητας υ_2, συγκρούεται ελαστικά με το σώμα 1, μάζας m_1, που αρχικά ισορροπεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου. Η θέση ισορροπίας του σώματος 1 είναι ίδια με την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα κάνει. Το σώμα 1 λόγω της κρούσης αποκτά ταχύτητα, άρα και κινητική ενέργεια.

<u>Στην ελαστική κρούση η θέση ισορροπίας πριν και μετά την κρούση παραμένει η ίδια.</u>

Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

α) Παίρνουμε τους τύπους της ελαστικής κρούσης για να βρούμε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.



$$\upsilon_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \text{ και } \upsilon_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_2$$

β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση (ΑΔΕΤ)

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + 0 \text{ ή } \upsilon_1' = \omega.A = \upsilon_{max}$$

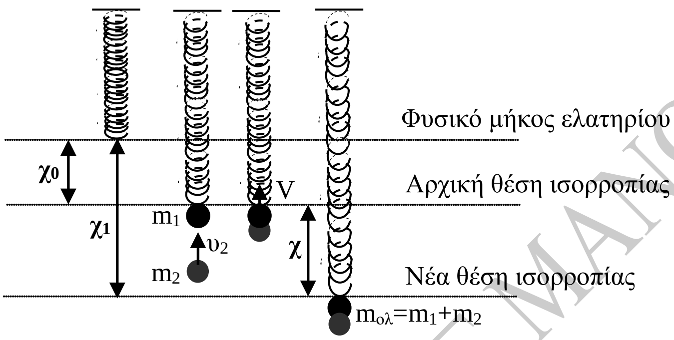
Ζ)Πλαστική κρούση

*Έστω το σώμα 2, μάζας m_2 και ταχύτητας $υ_2$, συγκρούεται πλαστικά με το σώμα 1, μάζας m_1, που αρχικά ισορροπεί δεμένο στο άκρο ελατηρίου. Η θέση ισορροπίας του σώματος 1 **δεν** είναι ίδια με την θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα κάνει το συσσωμάτωμα. Το σύστημα αποκτά δυναμική ενέργεια, και λόγω της κρούσης αποκτά και κινητική ενέργεια*

Όταν το ελατήριο είναι σε οριζόντιο επίπεδο, η θέση ισορροπίας πριν και μετά την κρούση παραμένει η ίδια.

*Όταν το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή πλάγιο, τότε **στη πλαστική κρούση η θέση ισορροπίας αλλάζει.***

i)Για κατακόρυφο επίπεδο:



α) βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας πριν τη κρούση.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_1 \Rightarrow κx_o = m_1 g \Rightarrow x_o = \frac{m_1 g}{κ}$$

β) βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας μετά την κρούση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολ} \Rightarrow κx_1 = m_{ολ} g \Rightarrow x_1 = \frac{m_{ολ} g}{κ}$$

γ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος V μετά την κρούση.

Στο παράδειγμα μας εδώ: $m_2.υ_2+0=(m_1+m_2).V$

δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση (ΑΔΕΤ)

$$E_{ταλ}=K+U \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_{ολ}V^2 + \frac{1}{2}D(x_1 - x_o)^2}$$

ii)Για κεκλιμένο επίπεδο:

α) βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας πριν τη κρούση. (βλέπε παρακάτω σχήμα)

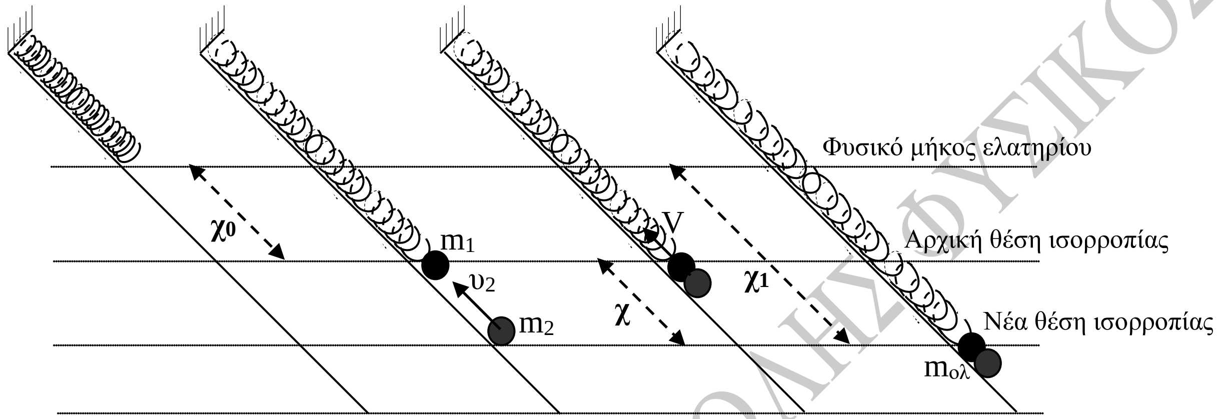
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_1 ημφ \Rightarrow κx_o = m_1 g ημφ \Rightarrow x_o = \frac{m_1 g ημφ}{κ}$$

β) βρίσκουμε τη νέα θέση ισορροπίας μετά την κρούση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_{o\lambda}\eta\mu\phi \Rightarrow \kappa x_1 = m_{o\lambda} g\eta\mu\phi \Rightarrow x_1 = \frac{m_{o\lambda} g\eta\mu\phi}{\kappa}$$

γ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος V μετά την κρούση.

Στο παράδειγμα μας εδώ: $m_2.\upsilon_2+0=(m_1+m_2).V$



δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση (ΑΔΕΤ)

$$E_{\tau\alpha\lambda}=K+U \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m_{o\lambda}V^2 + \frac{1}{2}D(x_1 - x_o)^2}$$

Η)Ρυθμοί μεταβολής:

•όταν σε ένα πρόβλημα ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας δηλ. $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$ τότε υπολογίζουμε την επιτάχυνση α αφού $\boldsymbol{\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}}$

•όταν σε ένα πρόβλημα ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της ορμής δηλ. $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ τότε υπολογίζουμε την ΣF αφού $\boldsymbol{\Sigma F = \frac{\Delta P}{\Delta t}}$

•όταν σε ένα πρόβλημα ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας δηλ. $\frac{\Delta K}{\Delta t}$ τότε ο υπολογισμός γίνεται ως εξής: $\boldsymbol{\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \frac{\Sigma F.\Delta x}{\Delta t} = \Sigma F.\upsilon}$

Ακόμη επειδή K+U= σταθερό $\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\Delta K}{\Delta t} = -\frac{\Delta U}{\Delta t}}$ ή $\boldsymbol{\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{\Delta K}{\Delta t}}$

Θ)Άλλες χρήσιμες παρατηρήσεις

o Αν η αρχική και η τελική θέση είναι ακραίες θέσεις ή η θέση ισορροπίας, τότε η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T/4

- Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από την ολική ενέργεια της ταλάντωσης. Επομένως, υπολογίζεται εύκολα από την ΑΔΕ για την ταλάντωση. $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$ οπότε $\Rightarrow A^2 = \frac{m}{D}\upsilon^2 + x^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}\upsilon^2 + x^2}$. Μην ξεχνάμε ότι $D=m\omega^2$.

- Όταν γνωρίζουμε την απομάκρυνση χ κάποια χρονική στιγμή και θέλουμε να βρούμε την ταχύτητα υ την ίδια χρονική στιγμή η το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε την ΑΔΕ για την ταλάντωση.

  $$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{D}{m}(A^2 - x^2) \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{(A^2 - x^2)} \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}}$$

  και

  $$\frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x^2 = A^2 - \frac{m}{D}\upsilon^2 \Rightarrow \boldsymbol{\chi = \pm\sqrt{A^2 - \frac{m}{D}\upsilon^2}}$$

- Όταν εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε να κινηθεί από τη θέση που το εκτρέψαμε **χωρίς αρχική ταχύτητα**, τότε η θέση αυτή είναι ακραία θέση της ταλάντωσης

- Η ενέργεια που προσφέρουμε για να ξεκινήσει η ταλάντωση είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης $W_{\pi\rho o\sigma\varphi.} = E_{o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}_{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}}$

- Σε περίπτωση κατακόρυφου ελατηρίου ή ελατηρίου σε κεκλιμένο επίπεδο ισχύει: $U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon} \neq U_{\tau\alpha\lambda\acute{\alpha}\nu\tau\omega\sigma\eta\varsigma}$

- Αν δεν δίνεται από την εκφώνηση του προβλήματος η φορά που θεωρούμε θετική, θα διαλέγουμε εμείς αυθαίρετα. Επειδή η αρχική φάση της ταλάντωσης εξαρτάται από το ποια φορά θεωρούμε θετική, η τιμή της μπορεί να διαφέρει ανάλογα με τη φορά που θεωρεί ο καθένας θετική.

- Στις σχέσεις $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \kappa.\chi$ και $U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = \frac{1}{2}\kappa\chi^2$ το χ είναι η συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου που μετράτε πάντα από το φυσικό του μήκος.

- Το έργο της $F_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon}$ υπολογίζεται από τη σχέση: $W_{F\varepsilon\lambda} = U_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon}} - U_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}_{\varepsilon\lambda\alpha\tau\eta\rho\acute{\iota}o\upsilon}}$

  μπορεί επίσης να υπολογιστεί από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας : $K_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = W_{\acute{o}\lambda\omega\nu\,\tau\omega\nu\,\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\nu}$ ή $K_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - K_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = W_{\Sigma F}$

- Η μεταβολή ενός μεγέθους Χ ορίζεται σαν $\Delta X = X_{τελ} - X_{αρ}$

  Ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους ορίζεται σαν ο λόγος $\dfrac{\Delta X}{\Delta t}$

  Η επί % μεταβολή ενός μεγέθους ορίζεται σαν $\Delta X\% = \dfrac{\Delta X}{X_{αρχικό}}.100$

- Η ταχύτητα υ στην απλή αρμονική ταλάντωση προηγείται της απομάκρυνσης χ κατά φάση $\dfrac{\pi}{2}$.

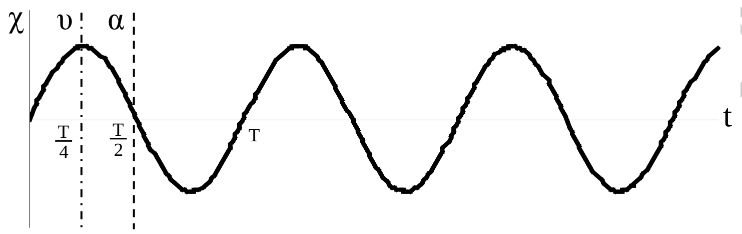
  Η επιτάχυνση α προηγείται της υ κατά $\dfrac{\pi}{2}$ ενώ η επιτάχυνση προηγείται της χ κατά π.

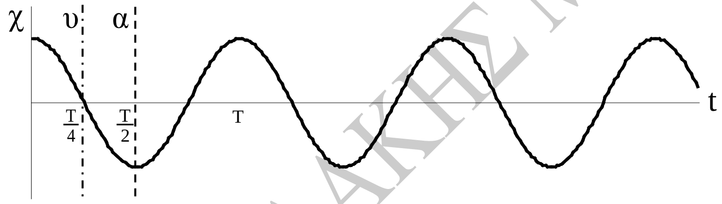
  Επομένως οι σχέσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης για τη χ , υ, α μπορούν να γραφούν και ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \chi = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \\ \upsilon = \omega A\eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}) \\ \alpha = \omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \pi) \end{Bmatrix}$$

ή αν δίνεται π.χ. $\chi = A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ τότε

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$
$$\alpha = \omega^2 A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$





Στα σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις χ, υ, α σαν συνάρτηση του t. Φαίνεται καθαρά η διαφορά φάσης που εκφράζεται με χρονική καθυστέρηση του χ κατά Τ/4 της υ και τη χρονική καθυστέρηση του χ κατά Τ/2 της α